Pennin

Développement :
Générateurs de $O(q)$:

leçons 106 161
108 170
160

Soit E un $\mathbb{R}$ ev de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Soit q une forme quadratique sur E définie positive et f sa forme bilinéaire symétrique associée.

Def – Le groupe orthogonal est $O(q) := \{u \in GL(E) ;\ \forall (x,y) \in E^2, f(u(x),u(y)) = f(x,y)\}$.
C'est l'ensemble des isométries de E. On définit également le groupe spécial orthogonal $O^+(q) := \{u \in O(q) ;\ \det u = 1\}$.

Prop : Soit $u \in GL(E)$ tq $u^2 = Id_E$. Alors $\exists\ E^+(u)$ et $E^-(u)$ tq
(i) $E = E_+(u) \oplus E^-(u)$
(ii) $u_{|E^+(u)} = Id_{|E^+(u)}$ et $u_{|E^-(u)} = -Id_{|E^-(u)}$
si $\dim E^-(u) = 1$, u réflexion (dans une bon certaine, de matrice $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ & & & -1 \end{pmatrix}$)
si $\dim E^-(u) = 2$, u renversement

Thm : $O(q)$ engendré par les réflexions. De plus, $u \in O(q)$ est le produit de au plus n réflexions.

Preuve :
Soit $u \in O(q)$. On pose $F_u = \{x \in E ;\ u(x) = x\}$ et $p_u = n - \dim(F_u)$.
Par récurrence, nous allons mq u est produit de au plus p_u réflexions (récurrence sur p_u).

* $p_u = 0 \Rightarrow u = Id_E \Rightarrow u$ produit de 0 réflexions.
* Supposons prop vraie au rang $p_u - 1$.
  Soit $x \in F_u^\perp \setminus \{0\}$ et $y = u(x)$. Alors $y \neq x$ car $x \notin F_u$.
  De plus u stabilise F_u et u isométrie donc u stabilise $F_u^\perp$:

  Soit $y \in F_u^\perp$. Soit $z \in F_u$.
  $f(u(y), z) = f(u(y), u(z)) = f(y,z) = 0$
  donc $u(y) \in F_u^\perp$.

Ainsi $u(y) = u(u(x)) \in F_u^\perp$, donc $y \in F_u^\perp$.

▶ Trouvons deux sous espaces E^+ et E^-

$$
\begin{aligned}
f(x-y, x+y) &= f(x,x) + f(x,y) - f(y,x) - f(y,y) \quad \text{) } f \text{ symétrique} \\
&= f(x,x) - f(y,y) \\
&= f(x,x) - f(u(x), u(x)) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

et $x-y \neq 0$ donc on a $E = \mathrm{Vect}\,(x-y) \oplus (x-y)^\perp$
$= E^- \oplus E^+$

▶ On utilise prop de l'intro pour avoir une réflexion :

Soit $\tau \in \mathcal{L}(E)$ tq $\begin{cases} \tau_{|E^-} = -Id_{E^-} \\ \tau_{|E^+} = Id_{E^+} \end{cases}$

Alors $\tau^2 = Id_E$ et $\dim(E^-) = 1$ donc τ réflexion.

▶ On étudie τ pour montrer que $F_u \subset F_{\tau u}$

- $y - x = \tau(x-y) = \tau(x) - \tau(y)$
  $x + y = \tau(x+y) = \tau(x) + \tau(y)$ (car $x+y \perp x-y$)

- Ainsi $\tau(y) = x$, i.e. $\tau(u(x)) = x$: Ainsi $x \in F_{\tau u}$.

- $x, y \in F_u^\perp$ donc $x - y \in F_u^\perp$. Ainsi, $F_u \subset (x-y)^\perp = E^+$ (par passage au supplémentaire)

Ainsi, $z \in F_u \Rightarrow \tau u(z) = \tau(z) = z$. Ainsi $F_u \subset F_{\tau u}$ (et donc $p_{\tau u} < p_u$).

▶ Pour appliquer l'HR, il reste à montrer que τu est une isométrie :

Soit $x, y \in E$. On écrit $x = x^+ + x^-$ avec $(x^+, x^-) \in E^+ \times E^-$
$y = y^+ + y^-$

$$
\begin{aligned}
f(\tau(x), \tau(y)) &= f(x^+ - x^-, y^+ - y^-) \\
&= f(x^+, y^+) - f(x^+, y^-) - f(x^-, y^+) + f(x^-, y^-) \\
&= f(x^+, y^+) + f(x^-, y^-)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(x, y) &= f(x^+ + x^-, y^+ + y^-) \\
&= f(x^+, y^+) + f(x^+, y^-) + f(x^-, y^+) + f(x^-, y^-) \\
&= f(x^+, y^+) + f(x^-, y^-).
\end{aligned}
$$

Ainsi τ isométrie. u est une isométrie donc τu est une isométrie.

On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à $p_{\tau v}$ (car $p_{\tau v} < p_v$)

et on obtient $\tau v = \tau_1 \cdots \tau_n$ avec τ_i réflexions et $n \leq p_{\tau \circ v} \leq p_v - 1$

On obtient donc $v = \tau . \tau_1 \cdots \tau_n$ avec $n+1 \leq p_v$.

Théorème: Pour $n \geq 3$, $O^+(q)$ est engendré par les renversements. Plus précisement, tout élément v de $O^+(q)$ est produit de au plus n renversements.

Preuve :

* Si $v = Id$, v est produit de 0 renversement par convention.

* Si $n = 3$

Soit $v \in O^+(q)$. Alors $v = \tau_1 \cdots \tau_n$ avec $n \leq 3$ où les τ_i sont des réflexions

Or le déterminant d'une réflexion vaut -1, donc $v = \tau_1 \tau_2$.

Remarquons que pour $n = 3$, τ réflexion $\Rightarrow -\tau$ renversement.

Donc $v = (-\tau_1).(-\tau_2)$ produit de deux renversements.

* Si $n > 3$

Soit $v \in O^+(q)$. Alors $v = \tau_1 \cdots \tau_{2p}$ avec $2p \leq n$. Il suffit donc de montrer le lemme suivant :

Lemme : Soit $n > 3$ et τ_1, τ_2 des réflexions. Alors $\exists\, \sigma_1, \sigma_2$ des renversements tq $\tau_1 \tau_2 = \sigma_1 \sigma_2$.

Soit H_1 et H_2 les hyperplans stabilisés par τ_1 et τ_2.

On a $\dim(H_1 \cap H_2) \geq n-2 \geq n-3$, et donc $H_1 \cap H_2$ contient un sous espace σ de dimension $n-3$. Ainsi $(\tau_1 . \tau_2)_{|\sigma} = Id_\sigma$. $\tau_1\tau_2$ stabilise σ, et est une isométrie, donc $\tau_1\tau_2(\sigma^\perp) \subset \sigma^\perp$ avec $\dim \sigma^\perp = 3$

D'après le cas $n=3$, $\exists\, \tilde{\sigma}_1$ et $\tilde{\sigma}_2$ renversements tq $(\tau_1\tau_2)_{|\sigma^\perp} = (\tilde{\sigma}_1 \tilde{\sigma}_2)_{|\sigma^\perp}$.

On prolonge maintenant $\tilde{\sigma}_1$ et $\tilde{\sigma}_2$ par l'identité sur E et on obtient le résultat.